2 METRİK UZAYLAR

2.1 Metrik

Metrik, uzaklık kavramının genellemesidir. Bir kümenin elemanları arasında belirlenen yakınlık ile (metrikle) birlikte kümeye metrik uzay denecektir.

Tanım: X herhangi boş olmayan bir küme olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $d: X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonuna, X üzerinde bir <u>metrik</u> denir.

1) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
2) $d(x,y)=d(y,x)$
3) $d(x,y) \le d(x,z)+d(z,y)$

Tanım: Üzerinde bir metrik tanımlanan bir X kümesine <u>metrik uzay</u> denir ve (X,d) ile gösterilir.

Örnekler: 1) Herhangibir X kümesi üzerinde $d(x,y)=\begin{cases} 0, & x=y \\ 1, & x\neq y \end{cases}$ fonksiyonu bir metriktir. Bu metriğe <u>diskirit</u> (discrete, ayrık) <u>metrik</u> denir.

2) $\mathbb{R}$ gerçel (reel) sayılar kümesinde $d(x,y)=|x-y|$ bir metriktir. Bu metriğe <u>doğal metrik</u> denir.

Not: $\mathbb{R}$'de d metriğinin adı belirtilmediği sürece, $(\mathbb{R},d)$ doğal metrik ile verilen metrik uzay anlaşılacaktır.

3) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$'de

$d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2))=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$ "Taxicab" metrik

$d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ Doğal (Öklidyen) metrik

$d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\text{maks}\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$ L_∞- metrik

metriklerdir.

Not: $\mathbb{R}^2$'de d metriğinin adı belirtilmediği sürece, $(\mathbb{R}^2,d)$ doğal metrik ile verilen metrik uzay anlaşılacaktır.

4) $[0,1]$ aralığındaki bütün sürekli fonksiyonların uzayı $C[0,1]$ kümesinde

$$d_1(f,g)=\int_0^1 |f(t)-g(t)|\,dt$$

ve

$$d_2(f,g) = \underset{0\le t\le 1}{\text{maks}}\{|f(t)-g(t)|\}$$

metriklerdir.

5) 17.11.2003 (Vize Sınavı) Soru1: (25 puan) (X,d) metrik uzay olsun. $d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ ile tanımlı $d_1: X\times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun X üzerinde bir metrik olduğunu gösteriniz.

1) $d_1(x,y)=0 \Rightarrow d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0$ $[1+d(x,y)\neq 0] \Rightarrow d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$.

$x=y$ olsun. $d(x,y)=0$ dır. $d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \dfrac{0}{1+0} = 0$.

2) $d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \dfrac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = d_1(y,x)$.

3) $0<a\le b$ ise $\dfrac{a}{1+a} - \dfrac{b}{1+b} = \dfrac{a-b}{(1+a)(1+b)} \le 0 \Rightarrow \dfrac{a}{1+a} \le \dfrac{b}{1+b}$ dir. $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$ olduğundan

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \le \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} = \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}$$

$$\le \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(z,y)} = d_1(x,z)+d_1(z,y)$$

dir. Metriğin üç şartı da sağlandığından $d_1(x,y)$'de X üzerinde bir metriktir.

6) 26.10.2005 (Vize Sınavı) Soru 1: a) (10 puan) (X,d) metrik uzay olsun. $d_1: 2^X\times 2^X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $d_1(E_1,E_2) = \inf\{d(x,y) \mid x\in E_1, y\in E_2\}$ ile tanımlansın. $(2^X, d_1)$ bir metrik uzay mıdır?

Metrik olmanın birinci ve üçüncü şartlarını sağlamadığından, d_1 bir metrik değildir. Örneğin, (X,d) metrik uzayı $(\mathbb{R},d)$ alınır ve A,B kümeleri $A=[0,1]$, $B=(1,2)$ alınırsa $A\neq B$ olduğu halde $d_1(A,B)=0$ dır. (Üçüncü şartın sağlanmadığını gösteriniz.)

Tanım: (X,d) metrik uzay ve x, X'in herhangibir elemanı olsun. $\varepsilon>0$ olmak üzere $\{y\in X \mid d(x,y)<\varepsilon\}$ kümesine x merkezli ε yarıçaplı <u>açık yuvar</u> veya <u>x'in ε-komşuluğu</u> denir ve $B_\varepsilon(x)$ ile gösterilir.

$$B_\varepsilon(x) = \{y\in X \mid d(x,y)<\varepsilon\}.$$

Buna göre $d(x,y)<\varepsilon \Leftrightarrow y\in B_\varepsilon(x) \Leftrightarrow x\in B_\varepsilon(y)$ dir.

Örnekler: 1) $(\mathbb{R},d)$'de x'in ε-komşuluğu

$B_\varepsilon(x) = \{y\in\mathbb{R} \mid d(x,y)<\varepsilon\} = \{y\in\mathbb{R} \mid |x-y|<\varepsilon\} = \{y\in\mathbb{R} \mid x-\varepsilon<y<x+\varepsilon\} = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

dır.

Doğru üzerinde gösterirsek: 

2) (X,d) diskirit metrik uzay olsun. Yani $d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\end{cases}$ dir. Bu durumda $B_{1/2}(x)=\{y\in X \mid d(x,y)<\frac{1}{2}\}=\{x\}$, $B_2(x)=\{y\in X\mid d(x,y)<2\}=X$ dir. Genel olarak

$$B_\varepsilon(x)=\begin{cases}\{x\}, & \varepsilon\leq 1\\ X, & \varepsilon>1\end{cases}$$

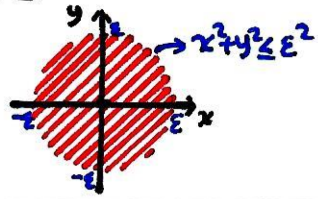
dir.

3) $\mathbb{R}^2$'de $(0,0)$ noktasının ε-komşuluğunu,

a) Doğal metrik d_1 b) taxicab metrik d_2 c) L_∞-metrik d_3 d) diskrit metrik d_4, metriklerine göre düzlemde gösteriniz.

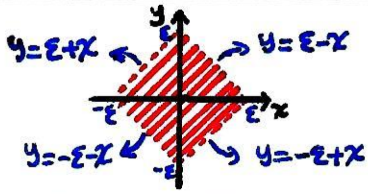
a) $d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$B_\varepsilon((0,0))=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d_1((x,y),(0,0))<\varepsilon\}$
$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<\varepsilon^2\}$



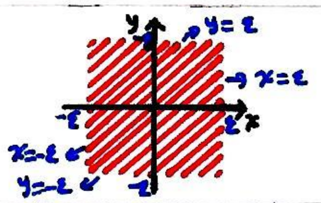
b) $d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2))=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$

$B_\varepsilon((0,0))=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d_2((x,y),(0,0))<\varepsilon\}$
$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|<\varepsilon\}$



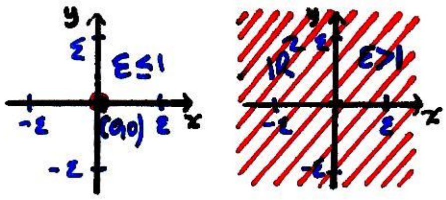
c) $d_3((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\text{maks}\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$

$B_\varepsilon((0,0))=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d_3((x,y),(0,0))<\varepsilon\}$
$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \text{maks}\{|x|,|y|\}<\varepsilon\}$



d) $d_4((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\begin{cases}0, & (x_1,y_1)=(x_2,y_2)\\ 1, & (x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)\end{cases}$

$B_\varepsilon((0,0))=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d_4((x,y),(0,0))<\varepsilon\}$
$=\begin{cases}(0,0), & \varepsilon\leq 1\\ \mathbb{R}^2, & \varepsilon>1\end{cases}$



4) 28.07.2007 (Vize Sınavı) Soru 1: b) $[0,1]$ üzerinde tanımlı bütün reel değerli sürekli fonksiyonlar kümesi üzerinde, f ve g bu kümeden iki fonksiyon olmak üzere

$$d(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx$$

metriğine göre $h_1(x)=2$, $h_2(x)=0$ ve $h_3(x)=\frac{3}{2}x$ fonksiyonlarının $h(x)=x$ fonksiyonunun $\varepsilon=1$ komşuluğu içinde olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $h_1(x)$ fonksiyonunun $h(x)$ fonksiyonunun 1 komşuluğunda olması için $d(h_1,h)<1$ olmalıdır. Buna göre

$$d(h_1,h)=\int_0^1 |2-x|\,dx=\int_0^1 (2-x)\,dx=\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{3}{2}$$

olduğundan $h_1(x)$ fonksiyonu $h(x)$'in 1 komşuluğunda değildir.

$$d(h_2,h)=\int_0^1 |0-x|\,dx=\int_0^1 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

olduğundan $h_2(x)$ fonksiyonu $h(x)$'in 1 komşuluğundadır.

$$d(h_3,h)=\int_0^1 \left|\frac{3}{2}x-x\right|dx=\int_0^1 \frac{x}{2}\,dx=\frac{x^2}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}$$

olduğundan $h_3(x)$ fonksiyonu da $h(x)$'in 1 komşuluğundadır.

2.2 Açık Kümeler

Tanım: (X,d) metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A'nın her x elemanı için $B_\varepsilon(x) \subset A$ olacak şekilde x'in bir ε-komşuluğu varsa A'ya <u>açık küme</u> denir.

Örnekler: 1) (X,d) diskrit metrik uzayında herhangi bir A kümesi, $\varepsilon \leq 1$ için $B_\varepsilon(x) = \{x\} \subset A$ olduğundan, açıktır. (Her $x \in A$ için)

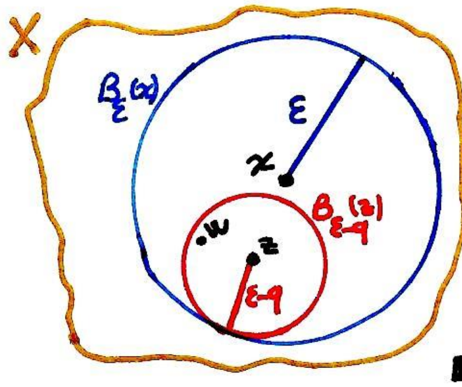
2) $(\mathbb{R},d)$ doğal metrik uzayında, (a,b) aralığı açık kümedir. Gerçekten, $x \in (a,b)$ için $\varepsilon = \min\{|x-a|, |b-x|\}$ alınırsa $B_\varepsilon(x) \subset (a,b)$ olduğundan (a,b) aralığı açıktır.

Teorem: (X,d) metrik uzay ve $\varepsilon > 0$ bir sayı olsun. $\forall x \in X$ için $B_\varepsilon(x)$ komşuluğu açık kümedir.

Kanıt: $\forall z \in B_\varepsilon(x)$ alalım ve $d(x,z) = q$ ile gösterelim. $\forall w \in B_{\varepsilon-q}(z)$ için

$$d(w,x) \leq d(w,z) + d(z,x) < (\varepsilon - q) + q = \varepsilon$$

olduğundan $w \in B_\varepsilon(x)$ dir. Yani $B_{\varepsilon-q}(z) \subset B_\varepsilon(x)$ dir. z ve w'nun keyfiliğinden, $B_\varepsilon(x)$, ε-komşuluğu açık kümedir. ∎



Teorem: (X,d) metrik uzay olsun. Bu durumda

a) X ve $\emptyset$ açıktır.

b) Sonlu sayıda açık kümelerin kesişimi açıktır.

c) Açık kümelerin herhangibir ailesinin birleşimi açıktır.

Kanıt: a) $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $B_\varepsilon(x) \subset X$ olduğundan, X açıktır. $\forall x \in \emptyset$ (böyle bir x yok) ve $\varepsilon > 0$ için $B_\varepsilon(x) \subset \emptyset$ olduğundan, $\emptyset$ de açıktır.

b) $k = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere A_k'lar açık kümeler olsunlar. $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \emptyset$ ise $\emptyset$ açık olduğundan kesişim açıktır. Aksi durumda keyfi $x \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ alalım. A_k'lar açık küme olduklarından her bir A_k için öyle $\varepsilon_k > 0$ sayıları vardır ki $B_{\varepsilon_k}(x) \subset A_k$ dır.

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$$

alınırsa $B_\varepsilon(x) \subset \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ olacaktır. Bu da kesişimin açık olduğunu gösterir.

c) $\alpha \in I$ ve A_α kümeleri açık kümeler olsunlar. $\forall x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ alalım. En az bir α_0 için $x \in A_{\alpha_0}$ dır. A_{α_0} açık küme olduğundan $\exists\, \varepsilon > 0$ vardır ki $B_\varepsilon(x) \subset A_{\alpha_0}$ dır.

Aynı zamanda $B_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ olduğundan, $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ kümesi açıktır. ■

Teorem: Bir (X,d) metrik uzayında, A alt kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart A'nın ε-komşuluklarının bir ailesinin birleşimi olarak yazılabilmesidir.

Kanıt: Yukarıdaki son iki teoreme göre, ε-komşuluğu açık küme ve açık kümelerin keyfi sayıdaki birleşimi açık olduğundan, ε-komşuluklarının bir ailesinin birleşiminin açık olduğu kanıtlanmış olur.

Tersine, A kümesi açık olsun. $\forall x\in A$ için $\exists \varepsilon_x>0$ vardır ki $B_{\varepsilon_x}(x)\subset A$ dır. Buna göre $\bigcup_{x\in A} B_{\varepsilon_x}(x)\subset A$ dır. $x\in A$ alalım. x aynı zamanda $B_{\varepsilon_x}(x)$'ninde elemanıdır. (Yani $x\in B_{\varepsilon_x}(x)$) Bu durumda $x\in\bigcup_{x\in A} B_{\varepsilon_x}(x)$ dir. Dolayısıyla, $A\subset \bigcup_{x\in A} B_{\varepsilon_x}(x)$ olur. Sonuç olarak

$$A=\bigcup_{x\in A} B_{\varepsilon_x}(x)$$

dır. ■

Not: $(\mathbb{R},d)$'de açık küme, keyfi sayıda açık aralıkların birleşimi şeklindedir.

Tanım: (X,d) metrik uzay ve $A\subset X$ olsun. $A^c=X-A$ açık küme ise A'ya <u>kapalı küme</u> denir.

Örnek: $(\mathbb{R},d)$'de $A=[0,1]$ kümesini düşünelim. $\forall x\in\mathbb{R}-A=(-\infty,0)\cup(1,\infty)$ için $\varepsilon=\min\{|x|,|1-x|\}$ olmak üzere $B_{\varepsilon/2}(x)\subset\mathbb{R}-A$ olduğundan, $\mathbb{R}-A$ açık kümedir. Dolayısıyla A, $\mathbb{R}$ doğal metrik uzayında kapalı bir kümedir.

Teorem: (X,d) metrik uzay olsun. Bu durumda,

a) X ve $\emptyset$ kapalıdır.

b) Sonlu sayıda kapalı kümenin birleşimi kapalıdır.

c) Keyfi sayıda kapalı kümenin kesişimi kapalıdır.

Teorem: (X,d) metrik uzay olsun. X'in her tek elemanlı alt kümesi (Yani $\forall x\in X$ için $\{x\}$ kümesi) kapalıdır.

Kanıt: $y\in X-\{x\}$ alalım. $\varepsilon=d(x,y)$ alınırsa, $B_\varepsilon(y)\subset X-\{x\}$ olduğundan $X-\{x\}$ kümesi açıktır. Buna göre, $\{x\}=X-(X-\{x\})$ kapalı kümedir ■

Örnek: $(\mathbb{R},d)$ metrik uzayında, $A_n=[0,1-\frac{1}{n}]$, $n=1,2,\cdots$ kümeleri kapalıdır. $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\{0\}$ kapalı bir küme, $\bigcup_{n=1}^{k}[0,1-\frac{1}{n}]=[0,1-\frac{1}{k}]$ kapalı bir küme, $\bigcup_{n=1}^{\infty}[0,1-\frac{1}{n}]=[0,1)$ kapalı olmayan bir kümedir.